Über den Minimalkreisring einer Eilinie.

Von STEPHAN VINCZE in Budapest.

Es bedeute K eine geschlossene konvexe Kurve, und G das von der Kurve K begrenzte abgeschlossene Gebiet. Ist P ein Punkt von G und Q ein variabler Punkt von K, so erreicht die Funktion $R(P) = \max_Q \overline{PQ}$ ihr Minimum R_u in einem einzigen Punkte P von G. Dieser Minimalwert R_u ist der Halbmesser des Umkreises von K. Die Funktion $r(P) = \min_Q \overline{PQ}$ erreicht ihr Maximum r_i entweder in einem Punkte, oder in solchen Punkten von G, die ein geschlossenes Geradenstück bilden. Diese Punkte sind die Inkreismittelpunkte von K.

Wir nennen die Funktion $o(P) = R(P) - r(P)$ *Oszillation* der Kurve in Bezug auf den Punkt P, das Minimum von $o(P)$ in G — d. h. die Breite des die Kurve K bedeckenden Minimalkreisringes — *Abweichung der Kurve vom Kreis*[1]). Bezüglich der Oszillation gilt der folgende

Satz 1. *Die Oszillation $o(P)$ ist im Gebiet G konvex im Sinne, daß $o(P) \leq \frac{o(P_1) + o(P_2)}{2}$ ist, wobei P den Mittelpunkt der in G liegenden Strecke P_1P_2 bedeutet.*

In **1** geben wir für diesen Satz einen einfachen Beweis. Als eine Anwendung dieses Satzes geben wir in **2** einen neuen Beweis für die von BONNESEN und KRITIKOS bewiesene Unizität des Minimalkreisringes[2]): Die Oszillation erreicht ihr Minimum in G in einem einzigen Punkt, und zwar im Inneren von G.

In **3** beweisen wir die Sätze:

Satz 2. *Wenn R und r die Halbmesser des Minimalkreisringes, R_u und r_i den Um- bzw. Inkreishalbmesser bezeichnet, so ist*

---

1) Auf derartige, das Minimum der *Variation* betreffende Probleme hat mich Herr Professor L. FEJÉR aufmerksam gemacht; ich bin ihm dafür sehr verbunden.

2) T. BONNESEN, Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren, *Math. Annalen,* **91** (1924), S. 252—268; N. KRITIKOS, Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln, *Math. Annalen,* **96** (1927), S. 583—586.

$$R_u \leqq R \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3} R_u, \qquad r_i \geqq r > \frac{1}{2} r_i.$$

Diese Abschätzungen sind genau.

Satz 3. *Bedeutet δ den Abstand des Minimalkreisringmittelpunktes von einem Inkreismittelpunkt, so gilt*

$$r \geqq \frac{R_u}{R_u + \delta} r_i.$$

Aus dem Satz 2 ergibt sich folgende Ungleichung für die Abweichung der Kurve vom Kreis:

$$R_u - r_i \leqq R - r < \frac{2\sqrt{3}}{3} R_u - \frac{1}{2} r_i.$$

Zum Schlusse beweisen wir in **4** einige Sätze über Integralmittelwerte. Es bedeute $r_P(\varphi)$ den Abstand eines Punktes P des Gebietes G von einem Punkte Q der Kurve K, für die die Halbgerade PQ mit einer festen Richtung den Winkel φ bildet. Es gilt der

Satz 4. *Die Funktion* $u(P) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r_P(\varphi)\, d\varphi$ *ist im Gebiet G konkav und nimmt darin ihr Maximum in einem einzigen Punkte an.*

Wenn wir dagegen den Abstand $r_P(s)$ eines Punktes P von einem variablen Punkt der Kurve K als Funktion der Bogenlänge s betrachten, wo s zwischen 0 und der Länge L von K variiert, so gilt der

Satz 5. *Die Funktion* $v(P) = \frac{1}{L}\int\limits_0^{L} r_P(s)\, ds$ *ist in G konvex und nimmt dort ihren minimalen Wert in einem einzigen Punkt an.*

1. Es sei S ein Punkt auf K mit maximalem Abstand vom Mittelpunkt P_0 der beliebigen Strecke P_1P_2. Dann besteht die Ungleichung $2\overline{P_0S} \leqq \overline{P_1S} + \overline{P_2S}$, in der das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn S auf die Verlängerung der Strecke P_1P_2 fällt. Wegen $R(P) = \max\limits_Q \overline{PQ}$ ergibt sich daraus

$$2R(P_0) = 2\overline{P_0S} \leqq \overline{P_1S} + \overline{P_2S} \leqq R(P_1) + R(P_2).$$

Die Funktion $R(P)$ ist also in der ganzen Ebene konvex.

Setzen wir nun voraus, daß P_1P_2 in G liegt und bezeichnen mit S_0 einen Punkt auf K, dessen Abstand von P_0 minimal ist. Ziehen wir aus P_1 und P_2 die mit dem Vektor $\overrightarrow{P_0S_0}$ gleichgerichteten Halbgeraden und nennen ihre Schnittpunkte mit K S_1 und S_2, so gilt, wegen der

Konvexität von K, $2\overline{P_0S_0} \geqq \overline{P_1S_1} + \overline{P_2S_2}$, woraus sich $2r(P_0) \geqq r(P_1) + r(P_2)$ ergibt. Dies bedeutet, daß $r(P)$ *in G konkav ist.*

Aus diesen Tatsachen folgt unmittelbar die Konvexität von $o(P) = R(P) - r(P)$ in G.

Bezeichnet M bzw. m das Minimum von $o(P)$ auf der Kurve K bzw. im Gebiet G und ist c eine Konstante für die $m \leqq c \leqq M$ gilt, so folgt aus der Konvexität von $o(P)$, daß die Punkte von G, für die $o(P) = c$ gilt, eine konvexe Kurve bilden. Da auf K $o(P) = R(P)$, fällt K dann und nur dann mit einer Kurve $o(P) =$ Konst. zusammen, wenn sie konstanter Breite ist.

Da $R(P)$ in der ganzen Ebene konvex ist, so sind die Kurven $R(P) = c$ für alle zulässigen Werte der Konstante c konvex. Dies trifft für die Kurven $o(P) = c$ im allgemeinen nicht zu. Dies folgt schon daraus, daß $o(P)$ sein Minimum für die ganze Ebene im allgemeinen nicht in G erreicht. Für ein rechtwinkliges Parallelogramm, dessen Seitenverhältnis $\frac{b}{a}$ klein ist, ist das Minimum m von $o(P)$ in G ungefähr gleich $\frac{a}{2}$, während bezüglich der ganzen Ebene $\lim\inf o(P) = b$ ausfällt. In diesem Fall besitzt die Kurve $o(P) = m$ in G einen isolierten Punkt.

2. Zum Beweis der Unizität des Minimalkreisringes zeigen wir zunächst, daß ein Punkt O des Gebietes G, in dem $o(P)$ ihr Minimum erreicht, notwendigerweise im Inneren von G liegt. Fällt nämlich O auf den Rand von G, so ist $r(O) = 0$ und $o(O) = \max \overline{OQ}$. In diesem Fall fällt aber der Punkt O mit dem Mittelpunkt O' des Umkreises C_u zusammen.

Wäre nämlich O' von O verschieden, so wäre wegen der Unizität des Umkreismittelpunktes

$$o(O') = R(O') - r(O') < R(O) = R(O) - r(O) = o(O).$$

Die Kurve fällt daher in den durch die Stützgerade g des Punktes O begrenzten Halbkreis des Umkreises C_u. Wegen der Eigenschaft des Umkreises hat C_u mindestens zwei gemeinsame diametrale Punkte mit K, nämlich die Schnittpunkte T und T' von g mit C_u. Auf der nach dem Inneren von K gerichtete Normale der Stützgerade im Punkt O gibt es einen Punkt N so, daß der Kreis um N mit dem Halbmesser $\overline{NO}$ ganz im Inneren von G liegt. Im Dreieck NOT gilt also die Ungleichung

$$o(N) = \overline{NT} - \overline{NO} < \overline{OT} = o(O),$$

die unserer Annahme widerspricht.

Wir nehmen nun an, o(P) erreiche ihr Minimum in zwei verschiedenen inneren Punkten O_1 und O_2. Dann gilt wegen der Konvexität von $o(P)$ für den Mittelpunkt O der Strecke O_1O_2: $o(O)=o(O_1)=o(O_2)$. Dies kann aber nur für solche Punkte vorkommen, für die

$$2R(O)=2\overline{OS}=\overline{O_1S}+\overline{O_2S}=R(O_1)+R(O_2)$$

ausfällt, wobei S einen Punkt auf K mit maximalem Abstand von O bezeichnet. Daraus folgt, daß einerseits S auf die Verlängerung der Strecke O_1O_2 fällt und andererseits S ein Punkt von K ist, der von beiden Punkten O_1 und O_2 einen maximalen Abstand besitzt. Dies bedeutet, daß etwa im Fall $R(O_1)<R(O_2)$ die Differenz $R(O_2)-R(O_1)=\overline{O_1O_2}$ ausfällt. Aus $o(O_1)=o(O_2)$ folgt daher $r(O_1)-r(O_2)=\overline{O_1O_2}$. Die Kreise, die man mit maximalen Halbmessern um O_1 und O_2 in K zeichnen kann, berühren sich also vom innen. Der Berührungspunkt S' liegt auf der Geraden O_1O_2 in der Reihenfolge $O_1O_2S'S$. Da aber der vom innen berührende Kreis auch einen gemeinsamen Punkt mit K hat, fällt S' auf die Kurve. Zwei verschiedene Punkte S und S' von K können aber nicht in dieselbe Richtung von den inneren Punkten O_1 und O_2 fallen. Aus diesem Widerspruch folgt die Unizität.

3. Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Minimalkreisringes mit O, seinen äußeren bzw. inneren Kreis mit C_g bzw. C_k und den Halbmesser von C_g bzw. C_k mit R bzw. r. Fällt O mit dem Mittelpunkt O_u des Umkreises C_u zusammen, so ist $R_u=R$. In jedem anderen Fall ist $R_u<R$.

Es sei $\Delta=\overline{O_uO}$ der Mittelpunktabstand der Kreise C_u und C_g, A und B die Schnittpunkte dieser Kreise. Derjenige Bogen $\widehat{AB}$ von C_u, der außerhalb der Kreisfläche C_g liegt, ist kleiner als ein Halbkreis, weil die gemeinsamen Punkte von C_u mit K auf einem Bogen liegen, der größer ist als ein Halbkreis. Wir machen nun von der Bonnesenschen Eigenschaft[3]) des Minimalkreisringes Gebrauch. Es gibt nach dieser vier Punkte von K, die beim Durchlaufen von K in einer Richtung abwechselnd auf C_k und C_g fallen. Der Minimalkreisring wird durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Auf dem in C_u liegenden Bogen $\widehat{AB}$ von C_g liegen demnach mindestens zwei Punkte A' und B' der Kurve K und zwischen A' und B' liegt mindestens ein mit C_k gemeinsamer Punkt D' von K. Wenn die Gerade OO_u die Sehne AB im Punkt D trifft, so liegt O_u zwischen O und D. Es gilt hiermit

$$r\geqq\overline{OD}=\Delta+\overline{O_uD}.$$

Da anderseits C_k in das Innere von C_u fällt, so ist

$$r\leqq R_u-\Delta.$$

[3]) Siehe Bonnesen, a. a. O. [2]), insb. S. 257.

Aus diesen zwei Ungleichungen folgt

$$\Delta + \overline{O_u D} \leqq r \leqq R_u - \Delta.$$

Ferner gilt $\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{AO}_u^2 - \overline{O_u D}^2$, d. h.

$$R^2 - (\Delta + \overline{O_u D})^2 = R_u^2 - \overline{O_u D}^2,$$

woraus sich

$$R^2 = R_u^2 + \Delta^2 + 2\Delta\,\overline{O_u D} = R_u^2 - \Delta^2 + 2\Delta(\Delta + \overline{O_u D})$$

ergibt. Nach der obigen Ungleichung $\Delta + O_u D \leqq R_u - \Delta$ gilt also

$$R^2 \leqq R_u^2 - \Delta^2 + 2\Delta(R_u - \Delta) = R_u^2 + 2\Delta R_u - 3\Delta^2.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist bei festem R_u für $\Delta = \frac{R_u}{3}$ am größten. Es gilt also $R^2 \leqq \frac{4}{3} R_u^2$, womit die erste Ungleichung in Satz 2 bewiesen ist.

Wir zeigen nun, daß in der soeben bewiesenen Ungleichung das Gleichheitszeichen bestehen kann. Betrachten wir die konvexe Hülle der Strecke AB und desjenigen Kreises vom Mittelpunkt O und vom Halbmesser $r = \frac{\sqrt{2}}{4}\overline{AB}$, der die Strecke AB in ihrem Mittelpunkt D berührt. Da der Kreisring mit dem Mittelpunkt O und mit den Halbmessern $r = \overline{OD}$, $R = \overline{OA}$ der Bonnesenschen Eigenschaft des Minimalkreisringes genügt, so ist $R = \overline{OA} = \frac{\sqrt{6}}{4}\overline{AB}$ der Halbmesser vom größeren Kreis des Minimalkreisringes von dem betrachteten Gebiet. Andererseits gilt für dieses Gebiet — wie leicht einzusehen ist — $R_u = \frac{3}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2} R$, w. z. b. w.

Wenden wir uns nun zur Abschätzung von r zu! Nach der Bonnesenschen Eigenschaft des Minimalkreisringes hat C_k mindestens zwei solche gemeinsame Punkte mit K, die zwei gemeinsame Punkte von C_g mit K trennen. Betrachten wir die Stützgeraden von C_k in diesen zwei Punkten. Diese Stützgeraden sind Tangenten des Kreises C_k und folglich auch der Kurve K. Wenn diese zwei Stützgeraden parallel sind, so ist $r = r_i$. Im Falle $r < r_i$ schneiden sich die Stützgeraden im Äußeren oder am Rande des Kreises C_g. Es bezeichne $\alpha\,(<\pi)$ den Winkel des von den Stützgeraden gebildeten Winkelraumes, der die Kurve enthält. Die gemeinsamen Tangenten der Kreise C_k und C_i bilden einen Winkel $\alpha' \leqq \alpha$ und somit fällt ihr Schnittpunkt E in das Äußere von C_g.

Es sei O_i der Mittelpunkt des Inkreises C_i und $\overline{OO_i} = \delta$. Dann gilt

$$\frac{r}{r_i} = \frac{\overline{EO}}{\overline{EO_i} + \delta}.$$

Wegen $\overline{EO} \geqq R$ folgt daraus

$$\frac{r}{r_i} \geqq \frac{R}{R+\delta} > \frac{R}{2R} = \frac{1}{2},$$

womit auch die zweite Ungleichung im Satz 2 dargetan ist. Aus der soeben bewiesenen Ungleichung $\frac{r}{r_i} \geqq \frac{R}{R+\delta}$ folgt ferner wegen $R \geqq R_u$ auch der Satz 3.

Das Beispiel eines gleichschenklingen Dreiecks, dessen Schenkel im Verhältnis zur dritten Seite groß sind, zeigt, daß r beliebig nahe zum Wert $\frac{1}{2} r_i$ kommen kann.

4. Es seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte des Gebietes G, P_0 der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2. Wenn S_0 ein beliebiger Punkt der Kurve K ist, so gilt die Ungleichung

$$\overline{P_0S_0} \geqq \frac{\overline{P_1S_1} + \overline{P_2S_2}}{2},$$

wo S_1 und S_2 die Schnittpunkte der aus P_1 und P_2 ausgehenden, zu dem Vektor $\overrightarrow{P_0S_0}$ parallelen Halbgeraden mit der Kurve K sind. Da das Gleichheitszeichen hier nur dann bestehen kann, wenn S_1, S_2 und S_0 auf einer Gerade liegen, so gibt es offenbar einen Bogen auf K so, daß für einen Punkt S_0, der auf diesem Bogen liegt, das Zeichen $>$ besteht. Bilden wir den Integralmittelwert für sämtliche Richtungen, so erhalten wir die Ungleichung $u(P_0) > \frac{u(P_1) + u(P_2)}{2}$, die die Konkavität von $u(P)$ und zugleich die Unizität des Maximumpunktes ausspricht.

Den Satz 5 gewinnen wir aus der Ungleichung

$$\overline{P_0S} \leqq \frac{\overline{P_1S} + \overline{P_2S}}{2},$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn S auf die Gerade P_1P_2 fällt. Das kommt aber für mehr als zwei Punkte der Kurve K nur dann vor, wenn K eine Strecke enthält und P_1P_2 auf dieser liegt. Wenn S auf dem Komplementbogen dieses geradlinigen Kurvenstückes liegt, dann besteht das Zeichen $<$. Es folgt daraus $v(P_0) < \frac{v(P_1) + v(P_2)}{2}$, womit auch der Satz 5 bewiesen ist.

(Eingegangen am 31. Dezember 1941.)